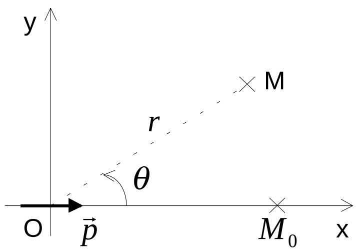
-EXERCICE 13.3-

• ENONCE :

« Particule dans le champ d'un dipôle électrique »



Une particule (M) de masse m, de charge q, se déplace dans un référentiel galiléen (repère cartésien Oxyz).
Elle est soumise à l'action d'un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$, situé en O et parallèle à l'axe Ox.
A t=0, la particule se trouve en M_0 , à une distance a de O, avec une vitesse initiale appartenant au plan xOy.

1) Montrer que la trajectoire de la particule est plane.

2) Ecrire le PFD et le TEC appliqués à la particule (on négligera l'action de la pesanteur).

3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par r(t) ; intégrer cette équation (on pourra faire le changement de variable $u = r^2$).

4) On veut que la particule suive une trajectoire inscrite sur un cercle de centre O et de rayon a :

   a) donner les 2 conditions nécessaires pour obtenir une telle trajectoire.

   b) exprimer la vitesse angulaire $\dfrac{d\theta}{dt}$ de la particule.

   c) décrire le mouvement en précisant ce qu'il se passe en $\theta = \pm\, \pi / 2$.

Rappel : le potentiel créé par un dipôle électrique s'écrit : $V(r,\theta) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

• CORRIGE :

«Particule dans le champ d'un dipôle électrique »

1) On sait que le champ créé par un dipôle électrique est de la forme :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow$ la force subie par la particule vaut :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} = K\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta\right)} \qquad \text{avec :} \qquad \boxed{K = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0}}$$

• L'accélération et la vitesse initiales appartenant au plan xOy, le mouvement de la particule se fait dans ce même plan.

2) En projection sur la base polaire, le PFD s'écrit :

$$\boxed{m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = K\times\frac{2\cos\theta}{r^3} \quad (1) \quad ; \quad m\left(2\frac{dr}{dt}\times\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = K\times\frac{\sin\theta}{r^3} \quad (2)}$$

• La force électrique dérivant d'un potentiel, l'énergie mécanique de la particule se conserve, ce qui conduit à :

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = cste = E_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \frac{K\cos\theta}{r^2} = E_0 \quad (3)}$$

3) On élimine $\dfrac{d\theta}{dt}$ en le sortant de (1) et en le reportant dans (3) ; il vient alors :

$$\boxed{r\times\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2E_0}{m}}$$

• Avec le changement de variable proposé, on a : $\dfrac{du}{dt} = 2r\times\dfrac{dr}{dt} \Rightarrow \dfrac{d^2u}{dt^2} = 2\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + 2r\times\dfrac{d^2r}{dt^2} \Rightarrow$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{4E_0}{m} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{4E_0}{m}\times t + \frac{du}{dt}(0) \Rightarrow u(t) = \frac{2E_0}{m}\times t^2 + \frac{du}{dt}(0)\times t + u(0)$$

• $\dfrac{du}{dt}(0) = 2r(0)\times\dfrac{dr}{dt}(0) = 2a\times\dfrac{dr}{dt}(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r^2(t) = \dfrac{2E_0}{m}\times t^2 + 2a\times\dfrac{dr}{dt}(0)\times t + a^2}$

4) a) Pour que la trajectoire soit inscrite sur un cercle, il faut que :

$r^2(t) = cste,\ \forall t \Rightarrow$ $\boxed{E_0 = 0 \text{ (énergie mécanique initiale nulle) ; } \dfrac{dr}{dt}(0) = 0 \text{ (vitesse radiale initiale)}}$

b) Des relations (1) ou (3), on tire :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{-\frac{2K\cos\theta}{ma^4}}} \qquad (4)$$

c) si $q \prec 0$: $K \prec 0 \Rightarrow \cos\theta \succ 0 \Rightarrow \boxed{\theta \in [-\pi/2\,;\,\pi/2]}$

si $q \succ 0$: $K \succ 0 \Rightarrow \cos\theta \prec 0 \Rightarrow \boxed{\theta \in [\pi/2\,;\,3\pi/2]}$

• Le mouvement est **périodique**, il se fait (pour chaque cas) sur un **demi-cercle** : la particule fait demi-tour en $\theta = \pm\,\pi/2$ (la relation (4) montre effectivement que la vitesse s'annule en $\theta = \pm\,\pi/2$).